

סטטיסטיקה

פרק 3 - התפלגות מינימום ומקסימום

תוכן העניינים

1. כללי

התפלגות מינימום ומקסימום:

רקע:

התפלגות מקסימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה.

$$\text{נגידר את : } F_U(t) = (F_X(t))^n \quad U = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\text{ולכן : } f(u) = n \cdot (F_X(u))^{n-1} \cdot f_x(u)$$

התפלגות מינימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה.

$$\text{נגידר את : } F_Z(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n \quad Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\text{ולכן : } f(z) = n \cdot [1 - F_X(z)]^{n-1} \cdot f_x(z)$$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

$$X_i \sim \exp(\lambda)$$

$$\text{הוכיחו כי : } i = 1, 2, \dots, n, \quad \min(X_i) \sim \exp(n\lambda)$$

שאלות:**1)** ענו על הסעיפים הבאים :א. הוכיחו שאם X_i מתפלג רציף עבור כל $i = 1, 2, \dots, n$ באופן בלתיתלי עם פונקצייתCDF $f(x)$ ו- $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, מתקיים

$$\text{ש: } f(z) = n[1 - F_X(z)]^{n-1} \cdot f_x(z)$$

ב. הוכיחו שאם X מתפלג רציף עבור כל $i = 1, 2, \dots, n$ באופן בלתי תלויעם פונקצייתCDF $f(x)$ ו- $U = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\text{מתקיים ש: } f(u) = n \cdot (F_x(u))^{n-1} \cdot f_x(u)$$

2) אורך חי רכיב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 ימים.

א. מכשיר בניי מס-3 רכיבים בלתי תלויים המוחברים במקביל.

בנו את פונקציית ההסתגלות המצתברת של אורך חי מכשיר.

ב. חזרו על סעיף א' אם הרכיבים מוחברים בטור.

ג. מה התוחלת והשונות של אורך חי המכשיר המתואר בסעיף ב'?

3) בכיתה 30 תלמידים, כל תלמיד נרדם תוך זמן המתפלג אקספוננציאלית עם

קצב של 8 הירדומיות בשעה. המורה צווק אחורי שנרדם התלמיד הראשון.

ועזוב את הכיתה שנרדם התלמיד האחרון?

א. מה הסיכוי שיצעק אחורי פחות מדקה?

ב. מה הסיכוי שיצא מהכיתה אחורי פחות מדקה?

4) 3 אנשים משתתפים בתחרויות ריצה ל-100 מטרים. כל אחד מהם רץ את המרחק

בזמן שהוא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה בתחום בין 10 ל-12 שניות.

א. מה הסיכוי שהמנצח סיים את הריצה בזמן הגובה מ-10.5 ל-11.2 שניות?

ב. מה הסיכוי שהმפסיד סיים את הריצה בזמן הנמוך מ-11.2 ל-12 שניות?

ג. מהי התפלגות הזמן הריצה של המפסיד בתחרויות? מצאו את התוחלת והשונות שלו?

5) X_1, X_2 מתפלגים נורמלית סטנדרטית.נגידר את: $Y = \max(X_1, X_2)$ ואת: $Z = \min(X_1, X_2)$.

$$\text{א. חשבו } P(z > 1)$$

$$\text{ב. חשבו } P(Y > 1)$$

$$\text{ג. חשבו } P(Y > 1 | Y > 0)$$

6) רונית נכנסת למכון יופי. היא מבצעת טיפול פדיוקור ומניקור בו זמנית. משך הזמן הפדיוקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 20 דקות ומשך זמן המניקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 15 דקות. נניח שאין תלות במשך זמן הטיפול של המניקור והפדיוקור.

א. מצאו את ההסתברות שמשך זמן הטיפול לא עולה על שעה.

ב. ידוע שמשך זמן טיפול הפדיוקור עולה על 10 דקות. מה ההסתברות שמשך זמן טיפול במכון היופי לא עולה על 20 דקות?

7) נתון ש: (λ) $X \sim \exp(\mu)$ ו- $Y \sim \exp(\lambda)$. כמו כן x, y בלתי תלויים. הוכחו כי: $U \sim \exp(\mu + \lambda)$.

8) נתון ש: X_1 ו- X_2 שני משתנים מקרים רציפים בלתי תלויים המתפלגים אחיד בין 0 ל-1. נגידיר: $Y = \max(x_1, x_2)$. חשבו את: $P(Y > 0.5)$.

9) נתון ש: $i = 1, 2, \dots, 5$ $X_i \sim U(0, 2)$ בלתי תלויים זה בזה כאשר: $T = \max(X_i)$. מצאו את פונקציית הצפיפות של T .

10) נתון משתנה מקרי X בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{אחר}\end{cases}$$

נגידיר את: $i = 1, 2, \dots, 10$ $W = \max(X_i)$.

חשבו את $E(W)$.

תשובות סופיות:**1)** הוכחה.

$$\cdot Z \sim \exp\left(\lambda = \frac{1}{10}\right) \text{ . ב. } F_u(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{30}t}\right)^3 \text{ . א. } \quad (2)$$

ג. תוחלת: 10, שונות: 100.

א. 0.9817 ב. 0. (3)

ג. תוחלת: 11.5, שונות: 0.15. א. 0.421875 (4)

ג. 0.3896 ב. 0.2922 א. 0.02518 (5)

ב. 0.2898 א. 0.9328 (6)

7) הוכחה.

.0.75 (8)

$$\cdot \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^4 \quad (9)$$

$$\cdot \frac{30}{31} \quad (10)$$